

TITULO : Una herramienta para la minimización de desperdicios en el corte de chapas

AUTOR : César Leodegar Cabello.

DIRECCION: Colegio Nacional San Alfonso
Carapeguá - Paraguay

RESUMEN : En este artículo se presenta el esquema de un sistema de minimización de desperdicios en el corte de formas cualesquiera, sobre formas rectangulares.

El proceso seguido es una combinación de heurística y programación lineal de acuerdo a lo que sigue:

- 1) Carga de datos gráficos y numéricos.
- 2) Obtención de rotaciones y reflexiones básicas de las figuras.
- 3) Obtención heurística de "buenos" rectángulos, con las formas a cortar
- 4) Obtención de un conjunto de rectángulos con mínimo desperdicio y que cuenta con todas las formas a cortar
- 5) Obtención de las combinaciones verticales, de los rectángulos obtenidos en el paso anterior.
- 6) Obtención de las combinaciones que minimiza el desperdicio.
- 7) Graficado de los resultados obtenidos.

El sistema fué desarrollado con el objeto de servir como instrumento para la obtención de buenas distribuciones, que puedan ser, eventualmente, fácilmente modificadas o mejoradas y permitir analizar varias alternativas.

1) CARGA DE DATOS GRAFICOS Y NUMERICOS:

Para una herramienta de esta naturaleza es de fundamental importancia contar con un medio que permita la carga de las figuras a cortar de una manera versátil, ya que de otro forma podría dificultarse la tarea del usuario, teniendo en cuenta la gran variedad e irregularidad de las figuras que aparecen en la práctica.

En el caso concreto de este trabajo la carga de las formas y de las chapas matrices es realizado utilizando un paquete de diseño gráfico llamado Autocad, de la firma Autodesk Inc.

El mencionado paquete permite el dibujo de las formas en escala natural y además asignarle un nombre a las figuras realizadas; así para la operación del sistema, el usuario deberá dibujar las formas a cortar y las chapas matrices en Autocad, para posteriormente en el sistema, expresar el número de cortes de cada figura, referenciada por su nombre.

A fin de no desviar la atención de la esencia del trabajo y mantenerse dentro de los límites asignados, se soslayará la operación con Autocad y habrá de considerarse que las figuras ya han sido cargadas y se encuentran expresadas como un conjunto de coordenadas cartesianas.

Inicialmente, por las características del medio de entrada, las coordenadas están referidas a un sistema de referencia externo.

Si bien este conjunto permite una identificación completa de la figura, no es de gran utilidad en el proceso posterior de encastre para la obtención de "buenos" rectángulos -3-, por lo que se hace necesario un sistema de referencia con origen en la misma figura; la adoptada para este trabajo está referida a la esquina noreste. Las razones de esta elección aparecen en la exposición del proceso - 3 -.

Las chapas matrices si bien son dibujadas no requieren ser expresadas como conjunto de coordenadas, sino solo se requieren sus dimensiones puesto que el sistema opera únicamente con chapas matrices rectangulares.

Al concluir esta etapa el sistema cuenta con los siguientes datos:

Conjunto de coordenadas normalizadas de las figuras a cortar.

Número de cortes de cada una de las figuras.

Dimensiones de la chapa matriz.

Áreas de las figuras a cortar.

Cantidad disponible de la chapa matriz.

2) ROTACIONES Y REFLEXIONES BASICAS DE LAS FORMAS A CORTAR.

En esta fase se obtienen las disposiciones básicas de las formas a cortar, que habrán de considerarse en la etapa siguiente de encastre. En principio dichas disposiciones son infinitas, por lo que se impone establecer un límite práctico; está podría ser por ejemplo efectuar un incremento de 10 grados en las rotaciones sucesivas, a partir de la posición original.

Debido a la obtención de resultados adecuados, sin desmedro de la velocidad de cálculo, en este trabajo los movimientos de las figuras se han reducido a rotaciones, con incremento de 90 grados, y a reflexiones; en total 8 posiciones básicas. En lo sucesivo cuando se hable de posiciones de una figura deberá entenderse que se hace referencia a alguna de estas 8 posiciones.

Para las rotaciones y reflexiones se utilizarán las siguientes transformaciones:

Rotación	$X' = Y$	$Y' = -X$
Reflexión	$X' = -X$	$Y' = Y$

Una vez obtenida las rotaciones y reflexiones básicas, deben distinguirse las disposiciones realmente diferentes, pues según puede observarse en el caso de un rectángulo, por ejemplo, de todas sus rotaciones y reflexiones básicas tan solo dos son diferentes.

A fin de identificar a las disposiciones repetidas se normalizarán las coordenadas obtenidas, según el principio ya presentado, y luego se comparan los conjuntos de coordenadas normalizadas entre sí, en caso de existir conjuntos iguales, se conserva uno de ellos y se desechan los demás; de esta forma se obtienen las disposiciones fundamentales.

Al concluir esta etapa el sistema cuenta con la siguiente información. Conjunto de coordenadas normalizadas de las disposiciones básicas de las figuras a cortar.

En este punto conviene realizar la aclaración de que si bien son 8 las posiciones básicas consideradas en el gráfico de distribución, el usuario puede realizar los cambios o agregados que considere adecuados antes de proceder a la impresión final, utilizando las ventajas proporcionadas por el uso del Autocad. Por otra parte la restricción a ocho en el número de posiciones no es de método, sino de práctica.

3) OBTENCION HEURISTICA DE "BUENOS" RECTANGULOS.

Para comprender claramente la necesidad de esta etapa, debe mencionarse el hecho de que la idea básica que subyace a este trabajo es la reducción del problema de optimización en el corte de formas cualesquiera al de optimización en el corte de formas rectangulares. Esta reducción se consigue mediante el encastre de las figuras de modo a formar con ellas, lo más ajustadamente posible, rectángulos.

Llevado al extremo de considerar toda la chapa matriz, la formación de "buenos" rectángulos con tal tamaño es ya la solución al problema, pero basta una rápida observación para cerciorarse de la inmensa barrera combinatoria que surge en este punto, para cuya superación se acude en este trabajo a las probabilidades, junto a un algoritmo que utiliza la siguiente estructura, fundamental, de datos.

Matriz de chapa: Esta matriz representa en la máquina a la chapa, sobre ella se realizan los encastres; en este proceso se tienen en cuenta las siguientes convenciones para las posiciones de la matriz: 0 posición libre, 1 posición ocupada por una figura, 2 posición libre, pero verificada para un encastre.

Matriz de figuras aceptadas: esta matriz guarda las coordenadas de la esquina noreste de las figuras admitidas en la formación de los rectángulos, así como un identificador de dichas figuras. Los datos de esta matriz permitirán la construcción del gráfico final de distribución.

Matriz de parámetros de los rectángulos: esta matriz guarda un conjunto de datos útiles sobre los rectángulos formados: dimensiones, figuras que lo conforman, número de los mismos, error cometido al circunscribir un rectángulo al encastre formado. Los datos de esta matriz permitirán la formación de los sistemas de ecuaciones.

Vector de probabilidades: este vector contiene un índice que señala la probabilidad de que determinadas figuras forme parte de los encastres. Inicialmente dichos índices son iguales al número de cortes requeridos de cada figura, y van decreciéndose de a uno a medida que dichas figuras vayan apareciendo.

Además de las estructuras citadas son utilizadas las siguientes variables:

Error de ajuste: como es sabido, el objetivo de esta etapa es la conformación con las figuras a cortar de rectángulos o algo lo más ajustadamente cercano a dicha forma. Lo más frecuente es que no se consiga un rectángulo, sino algo aproximado, cuya medida de error, expresada en unidades de áreas, se halla en esta variable.

Indicador de profundidad de error: en el proceso de encastre podría suceder que el agregado de nuevas figuras no mejore la aproximación a una forma rectangular, sino por el contrario lo empeore, esta situación podrá eventualmente revertirse posteriormente, sin embargo es necesario poner una cota a la secuencia de agregado de nuevas figuras. Esta variable señala el número de figuras ultimamente agregadas sin mejorar el ajuste a un rectángulo. La constante LIMITE DE PROFUNDIDAD ESTIMADA señala el valor máximo admisible para la profundidad de error.

Indicador de posibilidad de encastre: esta variable binaria señala la posibilidad o imposibilidad de realizar nuevos encastres; la imposibilidad es debido a que fue ocupado todo el espacio disponible de la chapa matriz.

PROCESO DEL ENCASTRE.

Obtención de coordenadas extremas de las figuras. Este paso se efectúa con el objeto de reducir el número de comparaciones durante la ejecución de los encastres y para facilitar la obtención de dimensiones de los rectángulos circunscritos. Las coordenadas extremas utilizadas son las equivalentes a los siguientes puntos cardinales: Nor-este, Nor-oeste, Sur-este, Sur-oeste, Este-norte, Este-sur, Oeste-norte, Oeste-sur.

Tantas veces como formas a cortar haya. Repetir.

Tantas veces como aspectos tenga la forma a cortar. Repetir.

Inicializar matriz de probabilidades
Inicializar matriz de chapas

Ubicar la disposición j de la forma i sobre la chapa.

Circunscribir un rectángulo a la figura.

Obtener error de ajuste.

Guardar en una matriz temporal de figuras aceptadas la coordenada de la esquina NE y un indicador de la figura.

Mientras Sea posible realizar encastres Y Profundidad de error < Límite de profundidad estimada Y Error de ajuste > 0. Repetir.

Realizar elección aleatoria de la forma a encastrar.

Tantas veces como coordenadas/n existan en la periferia del encastre actual. Repetir.

Para cada coordenada elegida de la periferia; circunscribir un rectángulo a la figura obtenida ubicando la esquina NE de la forma elegida, en su disposición actual, en la posición mencionada y considerando el estado actual del encastre.

Obtener error de ajuste.

Si error de ajuste es menor al menor actual de los errores de ajuste.
Para la forma elegida últimamente.

Actualizar valor del menor error de ajuste. Para la forma elegida últimamente.

Guardar coordenadas de la esquina NE.

Guardar nombre de la forma y su disposición.

Fin

Fin

Si fué posible ubicar la forma sobre la chapa.

Guardar en una matriz temporal de figuras aceptadas la coordenada de la esquina NE, y un indicador de la forma y disposición concomitante al menor actual de los errores de ajuste. Para la forma últimamente elegida.

Ubicar la forma elegida sobre la chapa.

Decrementar índice de probabilidad de elección.

Si error de ajuste del nuevo encastre es mayor al de encastre anterior.

Incrementar indicador de profundidad de error.

Si no.

Poner a cero indicador de profundidad de error.

Si error de ajuste es menor o igual al menor de los errores de ajuste. Para los encastres.

Actualizar valor del menor error de ajuste. Para los encastres.
Guardar coordenadas de la esquina NE y nombre de la figura para el
que que se cumplió la comparación.

Fin

Fin

Fin

Fin

Transpasar el contenido de la matriz temporal de figuras aceptadas a la
matriz de figuras aceptadas. Hasta el punto señalado por el menor error
de ajuste, para encastres.

Cargar matriz de parámetros de los rectángulos.

Fin

Fin.

La expresión, Tantas veces como coordenadas n existan en la periferia del
encastre actual. Repetir; señala uno de los aspectos fundamentales de la
estrategia seguida en la solución al problema, la cual puede resumirse en lo
sigte: Encastre de las figuras a cortar de modo a intentar formar con ellas
rectángulos, las que a su vez serán distribuidas, en forma óptima sobre las
chapas utilizando programación lineal.

A fin de asegurar que cada figura, y todas sus disposiciones, aparezca al
menos una vez entre los encastres generados, empezar cada nuevo encastre, con
una figura en disposición diferente, en el orden señalado por los dos ciclos
iniciales del algoritmo anterior, cada nueva figura a formar parte del
encastre es elegida en un sorteo en la que las figuras con mayor número de
cortes esperados poseen mayor posibilidad, en la medida que no hayan sido
elegidas aún.

El lugar preciso en el cual habrá de ser añadida la figura elegida, al
encastre, se efectúa haciendo un recorrido de la periferia del encastre en los
que se van probando el grado de ajuste a un rectángulo, se escoge la posición
que haya tenido el último menor error de ajuste. Este recorrido podría incluir
todas las coordenadas de la periferia, sin embargo dicha restricción impone un
incremento del tiempo de operación sin un aumento sustancial en la mejoría de
los resultados, según pudo observarse, por lo que la prueba se efectúa con un
paso de n , el cual depende de las formas, pero en general se obtienen buenos
resultados con tres. El encastre así formado va creciendo en tanto sea posible
realizar nuevos encastres y profundidad de error $<$ límite de profundidad
estimada y error de ajuste > 0 .

El número de encastres a obtener según el esquema anterior es igual al
producto del número de formas por el de disposiciones. Esta cifra podría
resultar pequeña, por lo que en este trabajo se agregó un ciclo adicional. El
límite de este ciclo se toma en base a consideraciones prácticas de tiempo de
respuesta; por supuesto cuanto mayor sea el número de rectángulos generados
tanto más probable habrá de ser la obtención de resultados convenientes.

Al finalizar esta etapa, el sistema cuenta con los parámetros de n rectángulos, formados por encastres entre las figuras a cortar.

4) OBTENCION DE UN CONJUNTO DE RECTANGULOS CON MINIMO DESPERDICIOS, QUE CUENTA CON TODAS LAS FORMAS A CORTAR.

El número de rectángulos obtenidos en el paso anterior resulta muy elevado para su empleo en la etapa siguiente, por lo que se impone una selección de los mismos. Dicha selección se realiza en base a la necesidad que se tiene de contar en los rectángulos escogidos con todas las figuras a cortar, en la proporción requerida y al mismo tiempo minimizando el desperdicio total que existe en los rectángulos.

Para la consecución de los mencionados objetivos el problema se planteó en doble etapa.

- a) Elección de un subconjunto de rectángulos convenientes.
- b) Obtención, mediante programación lineal, de un subconjunto óptimo de rectángulos.

La necesidad de la fase a) se hace evidente cuando se considera que de no ser por ella, la cantidad de rectángulos a ser considerados en el sistema de programación lineal obstaculizaría el objetivo de obtener respuestas rápidas. A fin de resolver el problema se ordena el conjunto de rectángulos por un índice con rango $[0,1]$, calculado para cada rectángulo, bajo las siguientes condiciones.

El índice mencionado es la suma de dos indicadores; un indicador del error de ajuste del rectángulo y un indicador del error de proporción. El significado atribuido al primero de estos índices ya resulta conocido, el segundo señala el desvío de la proporción de formas presentes en el encastre, de la proporción de cortes requeridos.

El índice del error de ajuste es calculado dividiendo el mínimo de los errores de ajuste, del conjunto de los rectángulos, por el error de ajuste del rectángulo en consideración y luego multiplicando el resultado por 0.7. Esto último señala que se le atribuye una importancia del 70% al error de ajuste.

El indicador del error de proporción es calculado mediante la siguiente fórmula: $1 - (i(P_i - C_i)^2 / iC_i^2)$, cuyo resultado es multiplicado por 0.3; lo que equivale a asignarle a este indicador una importancia del 30%. En la fórmula se utilizan las siguientes convenciones.

$i = 1, \dots$, número de figuras a cortar.

P_i Frecuencia de la figura i en el rectángulo.

C_i Cantidad de cortes esperados de la figura i .

Ordenados los rectángulos, de mayor a menor, por la clave descrita, se eligen los n primeros que permitan un adecuado tratamiento mediante un sistema de programación lineal; previa verificación de la existencia en el subconjunto escogido de todas las figuras a cortar, y si así no fuere el agregado de los mejores rectángulos, de acuerdo al índice, que permita el cumplimiento de esta condición.

En la fase b) de esta etapa, se realiza la elección del número óptimo de rectángulos mediante la resolución del siguiente sistema lineal.

$$\text{Min } \sum_i E_i X_i$$

Sujeto a

$$\sum_j F_{ij} X_j \geq C_j$$

Donde

$i=1, \dots$, número de rectángulos.

$j=1, \dots$, número de figuras a cortar.

E_i es el error de ajuste del rectángulo i .

X_i es el número de rectángulos i requeridos.

F_{ij} es la frecuencia de aparición, en el rectángulo i de la figura j .

C_j es la cantidad esperada de cortes de la figura j .

Al finalizar esta fase el sistema cuenta con la información de cuales rectángulos y cuantos de ellos se requieren para conseguir todos los cortes requeridos, con mínimo desperdicio dentro de los rectángulos.

El problema de la distribución óptima de los rectángulos elegidos, en la etapa anterior, sobre las chapas matrices, se planteó como el siguiente problema de programación lineal.

$$\text{Min } \sum_i \sum_j ((A_i * X_{ij} - \sum_k a_k * l_k * R_{kij} * Y_{kij}) / A_i * C_{ij}) * X_{ij}$$

Sujeto a

$$\sum_i \sum_j R_{kij} * Y_{kij} \geq NR_k \quad (1)$$

$$X_{ij} \geq l_k * Y_{kij} \quad (2)$$

$$\sum_j X_{ij} \leq L_i \quad (3)$$

Donde

$i=1, \dots$, número de chapas matrices.

$j=1, \dots$, número de combinaciones verticales de los rectángulos.

$k=1, \dots$, número de rectángulos.

A_i es el ancho de la chapa i .

X_{ij} largo ocupado por la combinación j sobre la chapa i .

a_k ancho del rectángulo k .

l_k largo del rectángulo k .

R_{kij} número de repeticiones transversales del rectángulo k , en la chapa i , dentro de la combinación j .

Y_{kij} número de repeticiones longitudinales del rectángulo k , en la chapa i , dentro de la combinación j .

E_k error de ajuste del rectángulo k .

NR_k número requerido de cortes, del rectángulo k .

L_i largo de la chapa i .

En la función objetivo, $A_i * X_{ij}$ representa la superficie total utilizada por la combinación j en la chapa i ; $a_k * l_k * R_{kij} * Y_{kij}$ representa la superficie cubierta por la combinación j en la chapa i . Así, la función

objetivo representa el porcentaje de desperdicio generado por la combinación j sobre la chapa i , ponderada por el largo de la combinación.

La restricción (1) expresa la necesidad de cumplir con el número exigido de rectángulos, las siguientes restricciones las condiciones que debe cumplir el largo de cada combinación.

La resolución de este sistema corresponde a lo que en el Resumen se denominó, Etapa de obtención de las combinaciones que minimiza el desperdicio.

Esta resolución exige el cálculo previo de R_{kij} , lo cual depende de lo que se nombró como:

6) OBTENCION HEURISTICA DE COMBINACIONES VERTICALES.

Este problema podría encararse como el de la generación de un árbol; pero, si bien este enfoque permite una solución teórica completa, presenta serios inconvenientes prácticos debido al elevado número de rectángulos que deben ser distribuidos, y en el caso de reducir el número de ramas para mantener el caso dentro de límites manejables, la decisión de lo que debe desecharse es, *a priori*, aleatoria. Por este motivo se decidió probar la generación de las combinaciones mediante una adaptación del proceso de encastre a este caso. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios, por esto y las ventajas de simplicidad y velocidad que representan se optó por este método. También aquí se presenta el inconveniente de que el número de combinaciones obtenidos resulta muy elevado para ser directamente utilizados en el sistema de programación lineal, por lo que se hace necesaria la elección previa de un subconjunto; dicha elección se efectúa siguiendo los mismos lineamientos de la fase a) de la Obtención de un conjunto de rectángulos con mínimo desperdicio, con la única salvedad de que el índice de ordenación se compone de los índices de error lateral de la combinación, error de ajuste de los rectángulos que componen la combinación y error de proporción; en ese orden de importancia. La eliminación de un conjunto de combinaciones no significa que con alguna de ellas no podría haberse obtenido resultados satisfactorios, sino que ello es poco probable, y la eliminación es necesaria para la reducción del problema a límites prácticos.

7) GRAFICADO DE LOS RESULTADOS.

Una vez resuelto el problema de programación lineal, de la etapa 6), se cuenta con toda la información necesaria para el graficado de la distribución final. El gráfico es obtenido en Autocad, lo cual permite introducir fácilmente cambios o hacer comparaciones entre resultados alternativos.

REFERENCIAS

- [1] Gilmore, P.C. y Gomory, R.E., 'A linear programing approach to the cutting stock problem', Operations Research, Vol 9, 849- 859, 1961.
- [2] Gilmore, P.C. y Gomory, R.E., 'A linear programinh approach to the cutting stock problem, part II', Operations Research, Vol 11, 863-888, 1963.
- [3] Gilmore, P.C. y Gomory, R.E., 'Multistage cuttinóg stock problems for two or more dimensions', Operations Research, Vol 13, 94-120, 1965.
- [4] Práwda, J., 'Métodos y modelos de la investigación de operaciones', Limusa, México, 1982.